

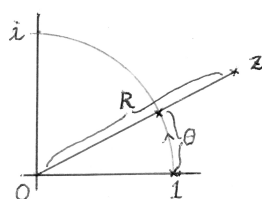
複素変数の指数関数と対数関数 補足

(i) 複素平面の復習

2月の書簡で触れた複素平面の話を一部復習します。 xy 平面の点 (x, y) を複素数 $z = x + yi$ で表示しているのが複素平面です。複素数 0 と対応する「原点」は **O** で表します (origin 由来)。

z の **O** からの距離を $|z|$ で表します。ちなみに $z = x + yi$ に対して $\bar{z} = x - yi$ を z の複素共役とよびます。複素共役に移す変換は和と積を保ち、又 $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ は基本的な関係式です。

次に $z \neq 0$ の偏角 $\theta = \arg(z)$ とは、**O** から見る点 z が実軸の正方向となす角度 (弧度法) です。正確にいうと、**O** を中心とする単位円周上の点 $z/|z|$ (直線 **Oz** と単位円周との交点) の位置を点 1 から左回りに円弧に沿って測る長さです。右回りに測って負符号をつけてもかまいません。1 回り 2π ですから、 2π の整数倍の差は (静止点についてなら) 同じとみます。角度も、結局は長さとして扱うわけです。



目線を見回すことで生じた概念「角度」を正確に数値化できるのは、(a) 完全な円 (パーフェクト・サークル) が実現でき、(b) それに数直線を巻きつけて測れるからだ、といえるでしょう。

そして、 $|z|$ と $\arg(z)$ を使うと、複素数の積の幾何的な意味が明瞭になるのです。

$$|zz'| = |z||z'| \quad (1)$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2)$$

(ii) 複素微分可能性と等角写像。

複素変数に複素数値を対応させる関数を複素平面 $\mathbf{C}_1$ から複素平面 $\mathbf{C}_2$ への写像 f と見るとき、この微分可能性がなぜ写像としての等角性と結びつくのか。

$\mathbf{C}_1$ の点 z における f の微分可能性とは何かというと、 z に別方向から接近する 2 点 z', z'' をとっても、 z, z', z'' の像 w, w', w'' に対して

$$(w' - w)/(z' - z) = (w'' - w)/(z'' - z) \quad (3)$$

が (極限において) 成り立つことです、が、これを単に書き換えれば

$$(z'' - z)/(z' - z) = (w'' - w)/(w' - w) \quad (4)$$

つまり z, z', z'' を頂点とする三角形は z の微小な近傍において形をかえない、特に左辺の角度つまり $\arg(z'' - z) - \arg(z' - z)$ も写像 f によって保たれるということを意味します。

たとえば多角形の内部を円の内部に 1 対 1 の等角写像で写せるかということ、写せることが証明されています（より一般にはリーマンの写像定理、多角形の場合の具体的構成はシュヴァルツ・クリストッフェルなど）。正方形なら楕円関数という 2 重周期関数を使います。指数関数 e^z は $2\pi i$ という 1 つの周期をもつ周期関数ですが、平面は 2 次元なので 2 つの独立な周期を持つ関数もあります。楕円関数論として解析的、代数幾何学的、そして整数論的にも研究されてきました。

ただし、複素解析関数の研究方法として強力なのは、微分可能性という解析的な捉え方の方です。例えばある点の近傍で一回微分可能なら何回でも微分可能で冪級数展開を持つ、孤立していないある点集合で二つの解析関数が一致していれば全体で一致する、など実変数の一回微分可能性とは全く異なる世界の基礎づけは、等角写像という見方だけでは容易に導けないと思います。当初は目に見えにくかった世界も、その法則性に導かれつつ目にみえる世界になってきたのでした。

(iii) 指数関数補足。

まず、2 月の対談でふれたように、代数方程式

$$z^n - 1 = 0 \quad (5)$$

の n 個の根は、幾何的には複素平面の原点中心の単位円周の n 等分点でしたから、解析的には指数関数のことばで $\zeta = e^{2\pi i/n}$ と置くと

$$\zeta^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

と表され、この表示はよく使われます。

e^z の公式

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (7)$$

は、微分方程式 $dw/dz = w$ の解 w の値を、変数が 0 から出発して z に至るまでの線分を n 等分し「区間の区切りだけで速度を変える」という近似によって（lim の中身が）出てくるのが由来です。

また、指数関数 $w = f(z) = e^z$ を z が 0 に近いところで多項式で近似するとすれば、 $f(0) = f'(0) = 1$ ですから 1 次の項までは $1 + z$ で、以下 $f''(0) = \dots = 1$ 等により n 次の項は $n-1$ 次の項の積分 $z^n/n!$ ($n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$) となりますが、実際、これらをそのまま繋ぐ無限級数がすべての複素数 z に対して収束（広義一様絶対収束）し、これが e^z の一番知られた表示

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (8)$$

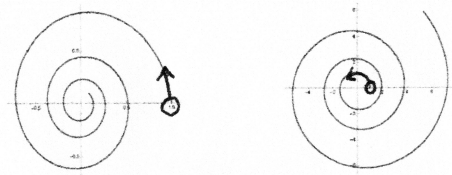
を与えます（ここで $0! = 1$ です）

(iv) 当初の問題への解答です。

眼が真左から正の向きに角度 θ のところに付いている場合、ランドマークを点 O におき本人は 1 の位置から出発するとするとき進む経路の時間 t によるパラメーター表示は、 ζ を（ここでは新たに） $\arg(\zeta) = \pi/2 + \theta$ で定まる $|\zeta| = 1$ の複素数とすると、次のように表されます。

$$e^{\zeta t} = e^{-(\sin \theta)t} (\cos((\cos \theta)t) + i \sin((\cos \theta)t)) \quad (9)$$

下図の左側は $\theta = \pi/30$ （接近）、右側は $\theta = -\pi/30$ （遠ざかる）の場合です。



(v) 指数関数の逆関数である対数関数（複素バージョン）

指数関数 $w = e^z$ の逆関数（ z を w の関数と見たもの） $z = \log w$ について。

見てきたように $e^{z+2\pi i} = e^z$ ですから、 w の値によって z は一意的に定まらず、 $z = \log w$ は $2\pi i$ の整数倍の不定性を持つ「多価関数」になります。他方、定義関係式 $dz/dw = 1/w$, $\log 1 = 0$ から直ちにわかるように、それは $1/w$ の 1 から w までの積分

$$\log w = \int_1^w \frac{dw}{w} \quad (10)$$

で与えられます。こちら側から見た多価性の理由はより明快で、平面上では「積分路が1つではないから」なのです。積分の値は条件次第では積分路の取り方によらない、というのがコーシーの定理ですが、その条件は「2つの道に挟まれた領域では関数が微分可能」です。もしもその関数が、いわば穏やかに ∞ になる「極」を持つと、この条件は満たされませんが、それはそれで大変面白い課題を（応用も！）与えてくれます。二つの積分路での積分の値の差は、それらを往と復に使う閉じた路に添っての積分で与えられますが、極の周りを回る積分路での積分の値の計算によって重要な情報が得られるからです。この $z = 1/w$ の場合も、積分路がその極 $w = 0$ の周りを左回りに1回余分にまわるとに積分の値が $2\pi i$ 増える（単位円でやってみて下さい）という、複素積分の基本を鮮やかに示してくれます。積分路を、まず実軸上で1から $|w|$ まで、次いで半径 $|w|$ 中心 O の円周にそって w までにとることによって、複素変数の対数は

$$\log w = \log |w| + \arg(w) i \quad (11)$$

だと分かります。ただし $\log |w|$ は e を底とする実変数の対数（自然対数）です（ $\arg$ の多価性が $\log$ のそれと対応）。

そして教科書で見るコーシーの定理の証明の多くは、細かく分けた積分路での評価に依存して
いて分かりにくいのですが、ポイントは「微分可能なら局所的に積分可能である」ことであり、こ
の証明は冪級数展開から示せ、局所的積分可能が分かれば関数の積分は終点での値から始点での
値を引くだけだから、コーシーの定理も局所ごとに分けて簡単に示せるのです（こう書いて欲し
かった）。